

# UN METODO MESHFREE IMPLICITO NEL DOMINIO DEL TEMPO PER L'ANALISI ELETTROMAGNETICA IN TRANSITORIO

Guido Ala<sup>1</sup>, Pietro Buccheri<sup>1</sup>, Elisa Francomano<sup>2</sup>, Adele Tortorici<sup>2</sup>, Fabio Viola<sup>1</sup>

<sup>1</sup>DIEET, <sup>2</sup>DINFO - Università degli Studi di Palermo - Viale delle Scienze, 90128 Palermo

Una grande varietà di problemi elettromagnetici in ambito ICT può essere studiato con successo mediante metodi numerici nel dominio della frequenza. D'altra parte spesso, in presenza di sistemi per i quali è necessario valutare la risposta in frequenza su larga banda, l'onere computazionale richiesto da tali metodi può divenire insostenibile. In tal caso risulta conveniente impiegare metodi che lavorino nel dominio del tempo risolvendo direttamente le equazioni differenziali alle derivate parziali che si ricavano dalle equazioni di Maxwell. Tali metodi fanno uso di griglie di nodi tra i quali deve essere specificata una qualche legge di connettività. Per domini di grandi dimensioni il costo computazionale del processo di meshing può risultare insostenibile. In aggiunta, l'eventuale re-meshing della struttura o di parte del dominio può risultare ancora più onerosa a causa della necessità di aggiornare le relazioni di connettività tra i nodi. I metodi meshless particellari, già da tempo impiegati con successo in diversi ambiti scientifici (strutturale, fluidodinamico, astronomico, biotecnologico, etc.) hanno recentemente trovato importanti ed innovative applicazioni anche in ambito elettromagnetico, supportati da alcune caratteristiche che non si riscontrano nei metodi tradizionali basati su griglia. Le maggiori peculiarità di tali metodi consistono nella possibilità di utilizzare un set di "particelle" distribuite in maniera non strettamente vincolata nella regione di analisi, evitando la costruzione di griglie regolari ed eventuali processi adattativi computazionalmente onerosi. Geometrie irregolari con diffuse disomogeneità possono pertanto essere trattate richiedendo risorse computazionali limitate. D'altra parte nell'applicare la formulazione meshless al dominio spaziale mantenendo una discretizzazione temporale esplicita basata su equazioni alle differenze finite, la condizione di stabilità, nota come Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), condiziona pesantemente le prestazioni computazionali. Infatti in tal caso la discretizzazione temporale è strettamente vincolata a quella spaziale e viceversa. Per superare il vincolo spazio-temporale costituito dalla CFL, la metodologia particellare che va sotto il nome di Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) è stata riformulata per l'applicazione all'analisi elettromagnetica in transitorio, utilizzando uno schema numerico *leapfrog* implicito basato sul metodo delle direzioni alternate (ADI) [1].

Il metodo consente così di rendere molto meno stringente il vincolo presente negli schemi numerici alle differenze espliciti. Il metodo proposto richiede la soluzione di un sistema lineare strutturato a banda, indipendente dall'evoluzione temporale e la cui sparsità dipende dalla distribuzione spaziale delle "particelle" ed in particolare dalla densità delle informazioni locali che sono necessarie per seguire l'evoluzione spazio-temporale della singola variabile di campo. Le variabili di campo vengono descritte tramite la discretizzazione di un integrale che richiede un "kernel" sul quale vengono trasferiti gli operatori differenziali.

A partire dalle equazioni di Maxwell ai rotori:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\sigma E_x}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right); \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\sigma E_y}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right); \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\sigma E_z}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right); \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right); \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

si procede applicando opportunamente lo schema *leapfrog* ADI nel dominio del tempo, ottenendo, con riferimento ad una delle equazioni (1) il seguente schema alle differenze in cui intervengono gli operatori derivata prima e seconda:

$$\epsilon E_x^{n+1/2} - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_x^{n+1/2}}{\partial y^2} = \epsilon E_x^{n-1/2} + \sigma(\Delta t) E_x^{n-1/2} - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_x^{n-1/2}}{\partial y^2} + \Delta t \left( \frac{\partial H_z^n}{\partial y} - \frac{\partial H_y^n}{\partial z} \right)$$

La formulazione particellare prima descritta consente di ottenere infine, per l'equazione precedente, lo schema SPH *leapfrog* ADI seguente:

$$\begin{aligned} \epsilon E_x^{n+1/2}(r_i^E) - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{NNP} [E_x^{n+1/2}(r_k^H) \frac{\partial^2 W(r_k^H)}{\partial y^2}] \Delta V_k = \\ \epsilon E_x^{n-1/2}(r_i^E) + \sigma(\Delta t) E_x^{n-1/2}(r_i^E) - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{NNP} [E_x^{n-1/2}(r_k^H) \frac{\partial^2 W(r_k^H)}{\partial y^2}] \Delta V_k + \\ + \Delta t \sum_{k=1}^{NNP} [H_z^n(r_k^H) \frac{\partial W(r_k^H)}{\partial y} - H_y^n(r_k^H) \frac{\partial W(r_k^H)}{\partial z}] \Delta V_k \end{aligned}$$

In fig. 1 e fig. 2 sono riportati gli andamenti ottenuti nei due casi FDTD e SPH *leapfrog* ADI per un caso esemplificativo di configurazione TE ( $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ) in aria, in dominio 2-D.

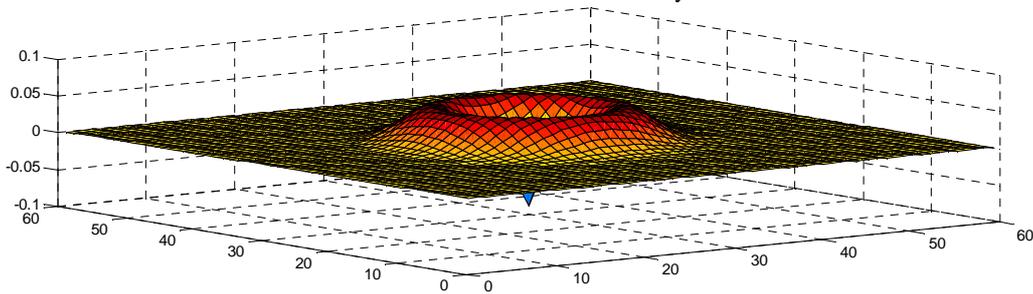


Fig. 1 – Simulazione FDTD classica su un dominio 2-D 60x60 con sorgente tempo variante nel punto centrale; configurazione TE, campo  $E_z$  al passo temporale 35.

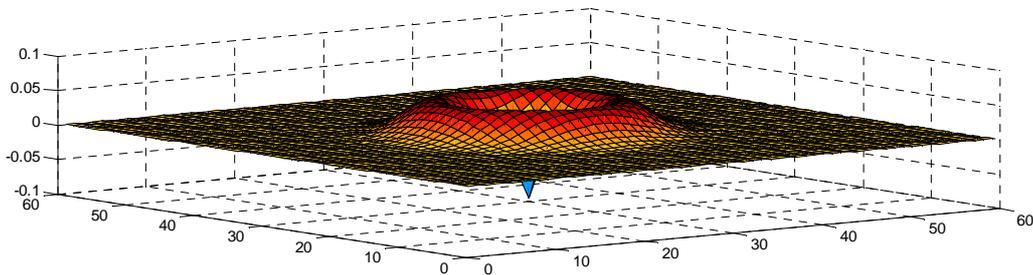


Fig. 2 – Simulazione SPH *leapfrog* ADI su un dominio 2-D con particelle E ed H disposte in modo regolare, con sorgente tempo variante nel punto centrale; configurazione TE, campo  $E_z$  al passo temporale 35.

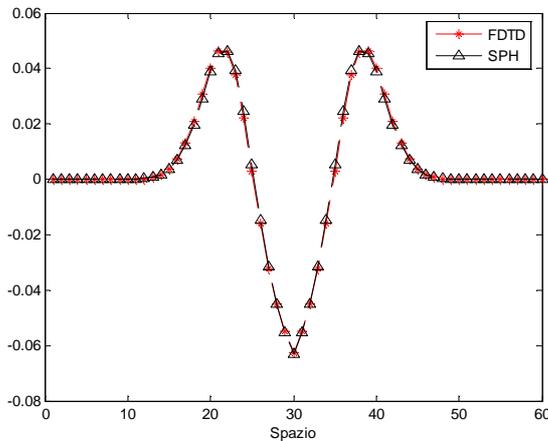


Fig. 3 – Confronto FDTD - SPH *leapfrog* ADI su un dominio 2-D 60x60 con sorgente tempo variante nel punto centrale; configurazione TE, campo  $E_z$  al passo temporale 35, lungo la direzione  $y$  per  $x$  corrispondente alla distanza di una cella dalla sorgente.

### Bibliografia

- [1] S. J. Cooke, M. Botton, T. M. Antonsen Jr and B. Levush, "A leapfrog formulation of 3-D ADI-FDTD algorithm", *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* **22**, 187-200 (2009).
- [2] J. Lee and B. Fornberg, "Some unconditionally stable time stepping methods for the 3D Maxwell's equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics* **166**, 497-523 (2004).
- [3] G. Ala and E. Francomano, "An implicit time domain meshless formulation for electromagnetic transient analysis" in via di sottomissione a *Journal of Computational and Applied Mathematics*.