

# METODI PER L'ANALISI DINAMICA DI CIRCUITI NON LINEARI CHE MODELLANO RETI NEURALI

*Mauro Di Marco, Mauro Forti, Massimo Grazzini, Luca Pancioni*  
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione  
Università degli Studi di Siena  
Via Roma 56, 53100 Siena

Negli ultimi anni l'attività di ricerca dell'Unità di Siena è stata dedicata prevalentemente allo studio dinamico di varie classi di circuiti non lineari che modellano reti neurali. Fra i principali temi di ricerca vi sono stati i seguenti: 1) analisi robustezza della stabilità completa (convergenza) in reti neurali di tipo cellulare (CNN); 2) nuovi metodi per la convergenza di circuiti non lineari di tipo “non-smooth”; 3) metodi innovativi per la convergenza di reti neurali di tipo cooperativo (con interconnessioni eccitatorie).

1) *Robustezza della stabilità completa di CNN.* L'Unità di Siena ha sviluppato tecniche per lo studio sulla robustezza della stabilità completa di CNN affette da piccole perturbazioni dissimmetrizzanti della matrice di interconnessione. Nel lavoro [1] è stata analizzata una classe di reti cellulari circolari, mostrando che la stabilità completa non è necessariamente robusta. Infatti, esistono perturbazioni (piccole rispetto al valore nominale delle interconnessioni) che, pur conservando la struttura della rete, provocano la cancellazione di tutti i punti di equilibrio asintoticamente stabili e quindi la perdita della stabilità completa. Nel lavoro [2] è stato dimostrato che la robustezza della stabilità completa è invece una proprietà generica (ovvero l'insieme di reti simmetriche che non sono convergenti in modo robusto è di misura nulla) per una classe di CNN del terzo ordine affette da una perturbazione dissimmetrizzante dipendente da due parametri. La tecnica utilizzata permette inoltre di stimare in modo esatto il margine di robustezza della stabilità completa per ogni rete simmetrica della classe considerata.

2) *Nuovi metodi per la convergenza di circuiti non lineari di tipo “non-smooth”.* La proprietà di convergenza delle reti neurali verso un punto di equilibrio è di fondamentale importanza in vista di molte applicazioni pratiche. In [3] è stato proposto un nuovo metodo di analisi della stabilità completa, per una classe di reti di Cohen-Grossberg, basato sull'impiego di una disuguaglianza di Lojasiewicz. Viene mostrato che per tali reti la convergenza è sempre di tipo esponenziale, anche quando i punti di equilibrio sono non isolati. Il lavoro [4] presenta un approccio geometrico per la convergenza di CNN competitive che sfrutta il concetto di schema decisionale originariamente proposto da Grossberg. Tale metodo non si basa sull'impiego di una funzione di Lyapunov e dunque può essere applicato anche al caso di CNN con matrice di interconnessione non simmetrica. I lavori [5-7] estendono risultati di convergenza, di stabilità asintotica ed esponenziale globale a modelli di circuiti non lineari con funzioni di attivazione discontinue o a più valori, come le reti CNN di tipo ‘full-range’. Utilizzando le metodologie dell'analisi multivoca, è stato possibile ricavare criteri di applicabilità generale. In [8-10] è stato sviluppato un metodo di Lyapunov, analogo a quello per le equazioni differenziali tradizionali, per il modello ‘full-range’ delle CNN. Tale modello è descritto da una particolare classe di inclusioni differenziali dette *disequazioni differenziali variazionali* (DVI). Inoltre è stata dimostrata una versione estesa del *principio di invarianza di LaSalle* che garantisce la convergenza asintotica delle soluzioni delle DVI all'insieme dei punti dello spazio degli stati in cui la derivata contiene il valore nullo.

3) *Metodi innovativi per la convergenza di reti neurali di tipo cooperativo.* Recentemente è stata intrapresa un'indagine teorica sulla possibilità di estendere alcune tecniche di analisi, valide per sistemi di tipo fortemente monotono, in modo che possano essere applicate a

sistemi monotoni che descrivono la dinamica di CNN cooperative con attivazioni lineari a tratti. Un primo risultato, ottenuto in [11], riguarda la dimostrazione di una forma di dicotomia per gli insiemi omega-limite, e la convergenza per quasi ogni soluzione, per una classe di CNN circolari definita da ‘template’ non-simmetrici e condizioni al contorno periodiche. Attualmente stiamo indagando sulla possibilità di estendere tali risultati ad altre classi di ‘template’ cooperativi e irriducibili di interesse per le applicazioni.

### Bibliografia

- [1] M. Di Marco, C. Ghilardi, “Robustness of complete stability for 1-D circular CNNs,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 16, n. 8, pp. 2177-2190, August 2006.
- [2] M. Di Marco, M. Forti, A. Tesi, “On the margin of complete stability for a class of cellular neural networks,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 18, n. 5, pp.1343-1361, May 2008.
- [3] M. Forti, “Convergence of a subclass of Cohen-Grossberg neural networks via the Lojasiewicz inequality,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybernetics B*, vol. 38, n.1 pp. 252-257, February 2008.
- [4] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, L. Pancioni, “Global consistency of decisions and convergence of competitive cellular neural networks,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 17, n. 9, pp. 3127-3150, September 2007.
- [5] M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, L. Pancioni, “Generalized Lyapunov approach for convergence of neural networks with discontinuous or non-Lipschitz activations,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 214, n. 1, pp. 88-99, February 2006.
- [6] M. Forti, “M-matrices and global convergence of discontinuous neural networks,” *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, vol. 35, no. 2, pp. 105-130, March/April 2007.
- [7] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “On global exponential stability of standard and full-range CNNs,” *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, vol. 36, n. 5-6, pp.653-680, July-September 2008.
- [8] G. De Sandre, M. Forti, P. Nistri, and A. Premoli, “Dynamical analysis of full-range cellular neural networks by exploiting differential variational inequalities,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 54, no. 8, pp. 1736-1749, Aug. 2007.
- [9] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, and L. Pancioni, “Lyapunov Method and Convergence of the Full-Range Model of CNNs,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2008, vol. 55, n. 11, pp. 3528-3541, December 2008.
- [10] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “Extended LaSalle's invariance principle for Full-Range Cellular Neural Networks,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2009, Article ID 730968, 10 pages, 2009. doi:10.1155/2009/730968.
- [11] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “Limit set dichotomy and convergence of semiflows defined by cooperative standard CNNs”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, in corso di stampa.
- [12] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “The dichotomy of omega-limit sets fails for cooperative standard CNNs,” *Proc. of 12th Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications (CNNA 2010)*, Berkeley CA, USA, 3-5 February 2010.
- [13] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “A note on dichotomy of limit sets for cooperative CNNs with delays,” *Proc. of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Paris, France, 20 May – 2 June 2010.
- [14] W. Allegretto, D. Papini, M. Forti, “Common asymptotic behavior of solutions and almost periodicity for discontinuous, delayed, and impulsive neural networks,” *IEEE Trans. Neural Networks*, 2010, in corso di stampa.
- [15] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, A. Premoli, “Comparison of convergence and stability properties for the state and output solutions of neural networks,” *J. Circuit Theory Applicat.*, 2010, in corso di stampa.